1 Aussagenlogik

f ist Belegung	$\Leftrightarrow$	$f : \mathrm{SK}_{\mathrm{AL}} \to \{0,1\}$	
$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) = 0$	(Def. 1.2.2)
$\mathrm{Wert}_f(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) = 1$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 0$	(Def. 1.2.2)
$\neg\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 0$	(Def. 1.2)
$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 0 \mathbin{\vee\!\!\vee} \mathrm{Wert}_f(\psi) = 1$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner) = 1$	(Def. 1.2.3)
$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1 \mathbin{\wedge\!\!\wedge} \mathrm{Wert}_f(\psi) = 0$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner) = 0$	(Def. 1.2.3)
$\mathrm{Wert}_f(\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner) = 1$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{Wert}_f(\psi) = 1$	(Satz 1.1.3)
$\mathrm{Wert}_f(\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner) = 1$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1 \mathbin{\wedge\!\!\wedge} \mathrm{Wert}_f(\psi) = 1$	(Satz 1.1.1')
$\mathrm{Wert}_f(\ulcorner\varphi\vee\psi\urcorner) = 1$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1 \mathbin{\vee\!\!\vee} \mathrm{Wert}_f(\psi) = 1$	(Satz 1.1.2')
$\mathrm{Wert}_f(\ulcorner\varphi\leftrightarrow\psi\urcorner) = 1$	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Wert}_f(\psi) = 1$	(Satz 1.1.3')
φ ist wahr bezüglich f	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1$	(Def. 1.3.1)
φ ist logisch wahr $\Leftrightarrow$ $\vDash\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\forall f(f \text{ Belegung} \Rightarrow \mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1)$	(Def. 1.3.2)
φ folgt logisch aus Σ $\Leftrightarrow$ $\Sigma\vDash\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\forall f(f \text{ Bel.} \mathbin{\wedge\!\!\wedge} \forall\psi(\psi\in\Sigma \Rightarrow \mathrm{Wert}_f(\psi) = 1) \Rightarrow \mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1)$	(Def. 1.3.4)
$\{\psi\}\vDash\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\psi\vDash\varphi$	(Def. 1.3.5)
φ und ψ sind log. äquiv. $\Leftrightarrow$ $\varphi \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} \psi$	$\Leftrightarrow$	$\varphi\vDash\psi \mathbin{\wedge\!\!\wedge} \psi\vDash\varphi$	(Def. 1.3.6)
$\vDash\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\varnothing\vDash\varphi$	(Satz 1.2.1)
$\psi\vDash\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\forall f(f \text{ Bel.} \mathbin{\wedge\!\!\wedge} \mathrm{Wert}_f(\psi) = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{Wert}_f(\varphi) = 1)$	(Satz 1.2.2)
$\varphi\vDash\psi$	$\Leftrightarrow$	$\vDash\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner$	(Satz 1.3.1)
$\varphi \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} \psi$	$\Leftrightarrow$	$\vDash\ulcorner\varphi\leftrightarrow\psi\urcorner$	(Satz 1.3.2)
$\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\ulcorner\neg(\varphi\to\neg\psi)\urcorner$	
$\ulcorner\varphi\vee\psi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\ulcorner(\neg\varphi\to\psi)\urcorner$	
$\ulcorner\varphi\leftrightarrow\psi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\ulcorner\neg((\varphi\to\psi)\to\neg(\psi\to\varphi))\urcorner$	

2 Piratenlogik

I ist Interpretationsfkt. über Ind.ber. M	$\Leftrightarrow$	$I : IK_{\mathcal{L}_{PL}} \cup PK_{\mathcal{L}_{PL}} \to M \cup \ldots \cup M^n$	(Def. 1)
$\mathcal{M} = \langle M, I\rangle$ ist Modell	$\Leftrightarrow$	$M \neq \varnothing \mathbin{\wedge\!\!\wedge} I$ ist Interpretationsfkt. über M	(Def. 2)
β ist $\mathcal{M}$-Belegung	$\Leftrightarrow$	$\beta : Var_{\mathcal{L}_{PL}} \to M$	(Def. 3)
$\beta(x:d)(y)$	$=$	$\begin{cases} d & \text{falls x = y} \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$	(Def. 4)
$t^{\mathcal{M},\beta} = t^{\langle M,I\rangle,\beta}$	$=$	$\begin{cases} \beta(t) & \text{falls t} \in Var_{\mathcal{L}_{PL}} \\ I(t) & \text{sonst} \end{cases}$	(Def. 5)
$\mathcal{M},\beta\vDash\ulcorner Pt_0\ldots t_{n-1}\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\langle t_0^{\mathcal{M},\beta},\ldots,t_{n-1}^{\mathcal{M},\beta}\rangle \in I(P)$	(Def. 6.1)
$\mathcal{M},\beta\vDash\ulcorner s = t\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$s^{\mathcal{M},\beta} = t^{\mathcal{M},\beta}$	(Def. 6.2)
$\mathcal{M},\beta\vDash\ulcorner\neg\varphi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\mathcal{M},\beta\vDash\varphi)$	(Def. 6.3)
$\mathcal{M},\beta\vDash\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$(\mathcal{M},\beta\vDash\varphi \;\Rightarrow\; \mathcal{M},\beta\vDash\psi)$	(Def. 6.4)
$\mathcal{M},\beta\vDash\ulcorner\forall x\varphi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\forall d(d\in M \Rightarrow \mathcal{M},\beta(x:d)\vDash\varphi)$	(Def. 6.5)
φ ist wahr in $\mathcal{M}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}\vDash\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\forall\beta(\beta$ ist $\mathcal{M}$-Belegung $\Rightarrow \mathcal{M},\beta\vDash\varphi)$	(Def. 7)
Σ ist wahr in $\mathcal{M}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}\vDash\Sigma$	$\Leftrightarrow$	$\forall\varphi(\varphi\in\Sigma \Rightarrow \mathcal{M}\vDash\varphi)$	(Def. 8)
φ ist logisch wahr	$\Leftrightarrow$	$\forall\mathcal{M}(\mathcal{M}$ ist Modell $\Rightarrow \mathcal{M}\vDash\varphi)$	(Def. 9)
φ folgt logisch aus Σ $\Leftrightarrow$ $\Sigma\vDash\varphi$	$\Leftrightarrow$	$\forall\mathcal{M}(\mathcal{M}$ ist Modell $\mathbin{\wedge\!\!\wedge} \mathcal{M}\vDash\Sigma \;\Rightarrow\; \mathcal{M}\vDash\varphi)$	(Def. 12)
$\ulcorner\exists x\varphi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\ulcorner\neg\forall\neg\varphi\urcorner$	
$\ulcorner\varphi\iota x\psi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\ulcorner\exists x(\psi\wedge\forall y(\psi(y/x)\to x = y)\wedge\varphi)\urcorner$	
$\ulcorner\iota x\varphi = \iota x\psi\urcorner$	$\Leftrightarrow$	$\ulcorner\exists x(\varphi\wedge\psi\wedge\forall y(\varphi(y/x)\vee\psi(y/x)\to x = y))\urcorner$	

3 Allgemeines

$$
\begin{array}{rcll}
\text{Zu zeigen: } \varphi \Rightarrow \psi & \therefore & \text{Gelte: } \varphi & \\
 & & \text{Zu zeigen: } \psi & \\
\text{Zu zeigen: } \forall x(\varphi[x]) & \therefore & \text{Sei } x_0 \text{ beliebig} & \\
 & & \text{Zu zeigen: } \varphi[x_0] & \\
\text{Zu zeigen: } \exists x(\varphi[x]) & \therefore & \text{Definiere: } x_0 = \ldots & \\
 & & \text{Zu zeigen: } \varphi[x_0] & \text{„Definiere-Move“} \\
\text{Zu zeigen: } \forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi[x]) & \therefore & \text{Sei } x_0 \text{ beliebig} & \\
 & & \text{Gelte: } \varphi[x_0] & \\
 & & \text{Zu zeigen: } \psi[x_0] & \\
\text{Zu zeigen: } \varphi & \therefore & \text{Gelte: } \neg\varphi & \\
 & & \text{Zu zeigen: } \psi \mathbin{/\!\!\wedge} \neg\psi & \text{„Reductio“} \\
\text{Zu zeigen: } \varphi & \therefore & \text{Zu zeigen: } (\psi \Rightarrow \varphi) \mathbin{/\!\!\wedge} (\neg\psi \Rightarrow \varphi) & \text{„Fallunterscheidung“} \\
\psi \Leftrightarrow \psi, \text{Zu zeigen: } \varphi & \therefore & \text{Zu zeigen: } \psi & \\
(\psi \Rightarrow \varphi) \mathbin{/\!\!\wedge} (\neg\psi \Rightarrow \varphi) & \Rightarrow & \varphi & \\
\forall x(\varphi[x]) & \Rightarrow & \varphi[x_0] & \text{„Spezialisierung“} \\
\forall x\varphi & \Leftrightarrow & \neg\exists x\neg\varphi & \\
\varphi \mathbin{/\!\!\wedge} (\varphi \Rightarrow \psi) & \Rightarrow & \psi & \text{„MP“} \\
\neg\psi \mathbin{/\!\!\wedge} (\varphi \Rightarrow \psi) & \Rightarrow & \neg\varphi & \text{„MT“} \\
\varphi \Rightarrow \psi \mathbin{/\!\!\wedge} \psi \Rightarrow \chi & \Rightarrow & \varphi \Rightarrow \chi & \text{„Kettenschluss“} \\
x \in \{y \mid \varphi[y]\} & \Leftrightarrow & \varphi[x] & \text{„Church“} \\
\neg(\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & \varphi \mathbin{/\!\!\wedge} \neg\psi & \\
\psi \Leftrightarrow \psi & \Leftrightarrow & \neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi & \\
\varphi \not\mathrm{R}\, \psi & \Leftrightarrow & \neg(\varphi \mathrm{\ R\ } \psi) & \\
M \subseteq N & \Leftrightarrow & \forall x(x \in M \Rightarrow x \in N) &
\end{array}
$$

4 Cn

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Cn}(\Sigma) & = & \{\varphi \mid \Sigma \vDash \varphi\} \\
\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\Sigma)) & = & \mathrm{Cn}(\Sigma)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\Sigma \subseteq \Sigma' & \Rightarrow & \mathrm{Cn}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma') \\
\vDash \varphi & \Leftrightarrow & \forall\Sigma(\varphi \in \mathrm{Cn}(\Sigma))
\end{array}
$$

5 KM-Grundregeln

$$
\begin{array}{rcll}
\varphi & \therefore & \varphi & \text{(Wh)} \\
\varphi & \therefore & \psi \to \varphi & \\
\neg\varphi & \therefore & \varphi \to \psi & \text{(As)} \\
\varphi,\ \varphi \to \psi & \therefore & \psi & \text{(MP)} \\
\neg\psi, \varphi \to \psi & \therefore & \neg\varphi & \text{(MT)} \\
\neg\varphi, \varphi \vee \psi & \therefore & \psi & \\
\neg\psi, \varphi \vee \psi & \therefore & \varphi & \text{(MTP)} \\
\neg\neg\varphi & \therefore & \varphi & \\
\varphi & \therefore & \neg\neg\varphi & \text{(DN)} \\
\varphi, \psi & \therefore & \varphi \wedge \psi & (\wedge\text{E}) \\
\varphi \wedge \psi & \therefore & \varphi & \\
\varphi \wedge \psi & \therefore & \psi & (\wedge\text{B})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclll}
\varphi & \therefore & \varphi \vee \psi & & \\
\varphi & \therefore & \psi \vee \varphi & & (\vee\text{E}) \\
\varphi \vee \psi, \varphi \to \chi, \psi \to \chi & \therefore & \chi & & (\vee\text{B}) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & \therefore & \varphi \to \psi & & \\
\varphi \leftrightarrow \psi & \therefore & \psi \to \varphi & & \text{(BK)} \\
\varphi \to \psi, \psi \to \varphi & \therefore & \varphi \leftrightarrow \psi & & \text{(KB)} \\
\forall x\varphi & \therefore & \varphi(t/x) & & (\forall\text{B}) \\
\varphi(t/x) & \therefore & \exists x\varphi & & (\exists\text{E}) \\
\exists x\varphi & \therefore & \varphi(a/x) & (a \text{ neu}) & (\exists\text{B}) \\
 & \therefore & t = t & & \text{(SI)} \\
t = u, \varphi[t] & \therefore & \varphi[u] & & \text{(Lb)}
\end{array}
$$